テーマ：平均値の定理と極限

問題

関数 $f(x)$ を $f(x)=\dfrac{1}{2}x\left\{1+e^{-2(x-1)}\right\}$ とする。ただし，e は自然対数の底である。

(1) $x>\dfrac{1}{2}$ ならば $0\leq f'(x)<\dfrac{1}{2}$ であることを示せ。

(2) x_0 を正の数とするとき，数列 $\{x_n\}$ $(n=0,1,\cdots)$ を，$x_{n+1}=f(x_n)$ によって定める。

$x_0>\dfrac{1}{2}$ であれば，$\lim_{n\to\infty}x_n=1$ であることを示せ。

（2005 東京大学）

解

(1)

$$f(x)=\frac{1}{2}x\left\{1+e^{-2(x-1)}\right\}$$

$$f'(x)=\frac{1}{2}\left\{1+e^{-2(x-1)}\right\}+\frac{1}{2}x\cdot -2e^{-2(x-1)}=\left(-x+\frac{1}{2}\right)e^{-2(x-1)}+\frac{1}{2}$$

$$f''(x)=-e^{-2(x-1)}+\left(-x+\frac{1}{2}\right)\cdot -2e^{-2(x-1)}=2(x-1)e^{-2(x-1)}$$

よって，$x>\frac{1}{2}$ における $f'(x)$ の増減は次表のようになる。

x	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$f''(x)$		$-$	0	$+$
$f'(x)$	$\frac{1}{2}$	$\downarrow$	0	$\uparrow$

また，$x>\frac{1}{2}$ ならば,

$$\frac{1}{2}-f'(x)=\frac{1}{2}-\left\{\left(-x+\frac{1}{2}\right)e^{-2(x-1)}+\frac{1}{2}\right\}$$
$$=\left(x-\frac{1}{2}\right)e^{-2(x-1)}>0$$

より，$f'(x)<\frac{1}{2}$

よって，$0\leq f'(x)<\frac{1}{2}$

(2)

解法のストラテジー

$\lim_{n\to\infty}|x_n - 1| = 0$ を示せばよい。

(1)の $x > \frac{1}{2}$ であれば $0 \leq f'(x) < \frac{1}{2}$ と $|f'(x)| < 1$ であることから，

平均値の定理を利用した無限等比数列による解法を発想する。

つまり，

$\frac{f(x_n) - f(1)}{x_n - 1} = f'(c)$（$c$ は x_n と 1 の間の実数）より，$\left|\frac{f(x_n) - f(1)}{x_n - 1}\right| = |f'(c)|$

よって，$|f(x_n) - f(1)| = |f'(c)||x_n - 1|$

ここで，$f(x_n) = x_{n+1}$，$f(1) = 1$ だから，

$|x_{n+1} - 1| = |f'(c)||x_n - 1|$

さらに，ここで，$0 \leq f'(x) < \frac{1}{2}$ がいえれば，

$|x_{n+1} - 1| < \frac{1}{2}|x_n - 1| < \left(\frac{1}{2}\right)^2 |x_{n-1} - 1| < \cdots < \left(\frac{1}{2}\right)^n \xrightarrow{n\to\infty} 0$ となる。

$0 \leq f'(x) < \frac{1}{2}$ がいえるためには，$x_n > \frac{1}{2}$ を示さなければならない。

解

(1)より，$x > \frac{1}{2}$ ならば $f'(x) \geq 0$，すなわち $f(x)$ は単調に増加する。

ｉ）$n = 1$ のとき

$x_0 > \frac{1}{2}$，$x_{n+1} = f(x_n)$ より，

$x_1 = f(x_0) \geq f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}(1 + e) > \frac{1}{2}$

ⅱ）$n = k$ のとき，$x_k > \frac{1}{2}$ とすると，

$x_{k+1} = f(x_k) \geq f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}(1 + e) > \frac{1}{2}$ より，

$n = k + 1$ のときも $x_{k+1} > \frac{1}{2}$ が成り立つ。

よって，ｉ)，ⅱ）より，$x_n > \frac{1}{2}$ が成り立つ。

$x_n \neq 1$ のとき，x_n と 1 の間に任意の実数 c をとると，

平均値の定理，$\dfrac{f(x_n)-f(1)}{x_n-1}=f'(c)$　が成り立つ。

よって，

$$\left|\frac{f(x_n)-f(1)}{x_n-1}\right|=|f'(c)|$$

$$\therefore |f(x_n)-f(1)|=|f'(c)||x_n-1|$$

$x_n>\dfrac{1}{2}$ より，$0\leq f'(c)<\dfrac{1}{2}$

また，$f(x_n)=x_{n+1}$，$f(1)=1$

よって，$|x_{n+1}-1|<\dfrac{1}{2}|x_n-1|<\left(\dfrac{1}{2}\right)^2|x_{n-1}-1|<\cdots<\left(\dfrac{1}{2}\right)^n \xrightarrow{n\to\infty} 0$

よって，$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=1$

あるいは，

x_n と x_{n-1} の間に任意の実数 d をとると

$\left|\dfrac{f(x_n)-f(x_{n-1})}{x_n-x_{n-1}}\right|=|f'(d)|$　が成り立つ。

$x_n>\dfrac{1}{2}$ より，$0\leq f'(d)<\dfrac{1}{2}$，

また，$x_{n+1}=f(x_n)$，$x_n=f(x_{n-1})$

よって，

$$|x_{n+1}-x_n|<\frac{1}{2}|x_n-x_{n-1}|<\left(\frac{1}{2}\right)^2|x_{n-2}-x_{n-3}|<\cdots<\left(\frac{1}{2}\right)^n|x_2-x_1|\xrightarrow{n\to\infty}0$$

よって，α を有限確定値とすると，$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\alpha$

このとき，$\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ より，$\alpha=f(\alpha)$

よって，$\alpha=\dfrac{1}{2}\alpha\left\{1+e^{-2(\alpha-1)}\right\}$

$x_n>\dfrac{1}{2}$ より，$\alpha>\dfrac{1}{2}$

よって，$e^{-2(\alpha-1)}=1$　　$\therefore \alpha=1$